РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВО РГУПС)
Лискинский техникум железнодорожного транспорта имени И.В. Ковалева
(ЛТЖТ – филиал РГУПС)

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по выполнению практической работы по теме
«РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ»
для специальностей
23.02.06 Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог
23.02.01 Организация перевозок и управления на транспорте (по видам)
(железнодорожный транспорт)

2022

УДК 656.223

Методические указания разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальностям среднего профессионального образования (далее – СПО) 23.02.06 «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог», 20.03.01 Организация перевозок и управления на транспорте (по видам) *(железнодорожный транспорт)*.

Автор
Новикова Е.В. – преподаватель ЛТЖТ – филиала РГУПС.

Рецензент
Лапыгина С.Н.– преподаватель ЛТЖТ – филиала РГУПС

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии математических и общих естественно-научных дисциплин, протокол от 31.08.2022 №1

Рекомендовано методическим советом ЛТЖТ – филиала РГУПС, протокол от 01.09.2022 №1.

Оглавление

Аннотация

Данная практическая работа проводится для обучающихся по специальностям среднего 23.02.06 «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог», 20.03.01 Организация перевозок и управления на транспорте (по видам) *(железнодорожный транспорт)*.

Методическая разработка предназначена для активизации усвоения учебного материала по теме «Показательная функция. Показательные уравнения». Содержание предложенных заданий соответствует программе курса математики по вышеуказанным специальностям. Задания направлены на систематизацию знаний и умений, на выявление усвоения основных положений темы.

Введение

В становлении современного человека большую роль играет математическая подготовка. Она выражается в применении конкретных математических знаний, необходимых в применении на производстве.

Более качественное освоение студентами знаний, умений и навыками происходит преимущественно в форме деятельности. Освоение различных форм деятельности позволяет преобразовывать, расширять и дополнять профессиональные компетенции студентов. Одной из таких тем, которая способствует развитию мышления, так необходимого современным специалистам является тема « Показательная функция».

Целью создания методической разработки является обеспечение обучающихся теоретическим и практическим материалом по теме «Показательные уравнения». Методические рекомендации содержат краткий теоретический материал по теме, план выполнения работы, задания длф самостоятельного решения по вариантам.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение большинства математических задач так или иначе связано с преобразованием числовых, алгебраических или функциональных выражений. Сказанное в особенности относится к решению **показательных уравнений и неравенств**. В данной методической разработке рассмотрены основные типы показательных уравнений и неравенств, а также различные методы их решений.

Прежде чем приступить к разбору конкретных показательных уравнений и неравенств, следует вспомнить некоторый теоретический материал, который нам понадобится.

Показательная функция

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

Таблица 1. Свойства показательной функции

	Свойства	$y = a^x$, где $a > 1$	$y = a^x$, где $0 < a < 1$
1	Область определения $D(f)$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$
2	Область значений $E(f)$	$y \in (0;\ +\infty)$	$y \in (0;\ +\infty)$
3	Монотонность	Возрастает Большему аргументу соответствует <u>большее</u> значение функции	Убывает Большему аргументу соответствует <u>меньшее</u> значение функции
4	Непрерывность	непрерывна	непрерывна

График показательной функции имеет вид:

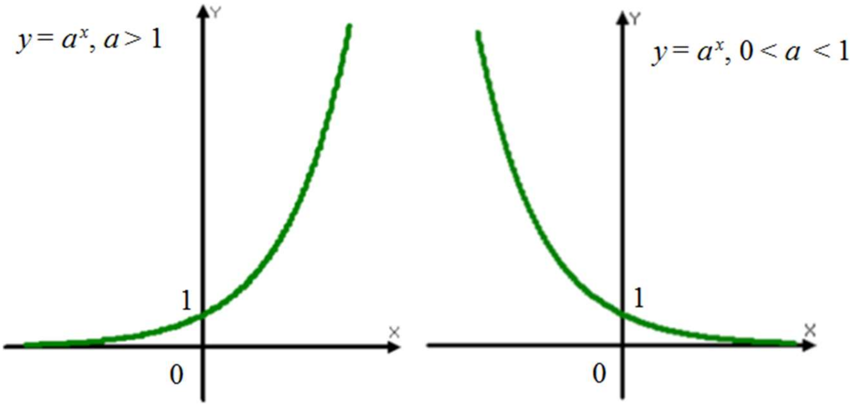

Таблица 2. Основные свойства степеней

$a > 0, \quad b > 0, \quad n \in N, \quad m \in Z$			
1	$a^0 = 1; \quad 1^x = 1$	5	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
2	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	6	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	7	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4	$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	8	$(a^x)^y = a^{xy}$

Показательные уравнения

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных уравнений* требуется знать и уметь использовать следующую теорему:

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Метод уравнивания показателей основывается на том свойстве, что, если основания степеней равны, то равны и показатели степеней. Поэтому при использовании данного метода необходимо левую и правую часть уравнения привести к степени с одинаковыми основаниями. Затем приравниваем показатели и решаем получившееся уравнение.

Пример 1.Решить уравнение $3^{x^2-\frac{5}{7}x}-\sqrt[7]{9}=0$

Решение:

$$3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9}$$

$$3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{3^2}$$

$$3^{x^2-\frac{5}{7}x}=3^{\frac{2}{7}}$$

С учетом теоремы 1 переходим к эквивалентному уравнению:

$$x^2-\frac{5}{7}x=\frac{2}{7}$$

$$x^2-\frac{5}{7}x-\frac{2}{7}=0$$

Умножаем обе части уравнения на 7, получаем:

$$7x^2-5x-2=0$$

$$D=b^2-4ac=5^2-4\cdot 7\cdot(-2)=25+56=81=9^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=-\frac{2}{7}, \qquad x_2=1.$$

Ответ: $-\frac{2}{7}$; 1.

Пример 2. Решите уравнение $0{,}2^{x-0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}2}=0{,}2^{-1}\cdot 0{,}04^{x-1}$

Решение.

Используя свойства степеней, преобразуем уравнение:

$$0{,}2^{x-0{,}5}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{2}}=0{,}2^{-1}\cdot(0{,}2^2)^{x-1}$$

$$0{,}2^{x-0{,}5+\frac{1}{2}}=0{,}2^{-1}\cdot 0{,}2^{2x-2}$$

$$0{,}2^{x}=0{,}2^{2x-3}$$

С учетом теоремы 1 переходим к эквивалентному уравнению:

$$x = 2x - 3$$

$$x - 2x = -3$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

Метод введения новой переменной используется в случае, когда после упрощения обеих частей уравнения появилась возможность обозначить какую-то степень другой переменной и, при этом, все остальные степени также будут выражаться через введённую переменную.

Пример 3. Решите уравнение:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$$

Решение. Используя свойства степеней (таблица 2, свойство 6), преобразуем уравнение:

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$$

Вводим замену: $2^x = t,$ причем $t > 0$

$$2t^2 - 5t - 88 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 729 = 27^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{5 + 27}{2 \cdot 2} = 8;$$

$$t_2 = \frac{5 - 27}{2 \cdot 2} = -5{,}5.$$

Выполняем обратную подстановку, т.е. возвращаемся к исходной переменной:

$$1) 2^x = -5{,}5 \text{ (нет решений, т. к. } 2^x > 0)$$

$$2)\ 2^x = 8 \iff 2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Ответ: 3

Пример 4. Решите уравнение $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x$

Решение: $(2^x)^2 + 8 - 6 \cdot 2^x = 0$

Вводим новую переменную: $2^x = t, \quad t > 0$

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

По теореме Виета находим $t_1 = 2, \quad t_2 = 4.$

Обратная замена, т.е. возвращаемся к исходной переменной:

$$2^x = 2 \quad \text{или} \quad 2^x = 4$$

$$2^x = 2^1 2^x = 2^2$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 2$$

Ответ: 1; 2

Пример 5.Решите уравнение $18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0$

Решение: Учитывая, что показательная функция строго больше нуля при любом значении *x* и используя правила вычисления произведения и частного степеней, получим:

$$(2 \cdot 3^2)^x - 8 \cdot (2 \cdot 3)^x - 9 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0$$

$$2^x(3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9) = 0$$

$$2^x \neq 0, \qquad 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

Используем замену$3^x = t$.

$$t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -1.$$

Обратная замена:

$$1). \; 3^x = -1 \text{ (нет решений)}$$

$$2). \; 3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Метод разложения на множители, в частности, вынесения общего множителя за скобки, используется в том случае, когда степени, входящие в уравнение, имеют одинаковые основания и коэффициенты перед переменной в показателе степени также одинаковы.

Пример 6. Решите уравнение $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$

Решение. Вынесем в правой части уравнения за скобки общий множитель 7^{x+1}Вынести за скобки – значит разделить каждое слагаемое на этот общий множитель, а при делении степеней показатели вычитаются.

$$7^{x+1}(7^1 + 4) = 539$$

$$7^{x+1} \cdot 11 = 539$$

$$7^{x+1} = \frac{539}{11}$$

$$7^{x+1} = 49$$

$$7^{x+1} = 7^2$$

Переходим к эквивалентному уравнению:

$$x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Метод почленного деления заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения, содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Он применяется для решения однородных показательных уравнений.

Пример 7.Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

Делим обе части уравнения на $\left(\frac{1}{5}\right)^x$, т.к. обе части уравнения можно умножать или делить на число, отличное от 0, получая при этом равносильное уравнение. Выражение $\left(\frac{1}{5}\right)^x > 0$ при любом значении переменной x. Получаем:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x : \left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^0$$

$$x = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 8.Решите уравнение:

$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$$

Решение:

Используя свойства степеней, выполняем преобразования:

$$3^x \cdot 7^x \cdot 7^2 = 49 \cdot 4^x$$

$$(3 \cdot 7)^x \cdot 49 = 49 \cdot 4^x$$

$$21^x = 4^x$$

Делим обе части на $4^x > 0$:

$$\left(\frac{21}{4}\right)^x = 1$$

$$x = 0.$$

Ответ: 0

Пример 9. Решите уравнение $3 \cdot 2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0$

Решение.

Делим обе части уравнения на 3^{2x}, это возможно, т.к. $3^{2x} \neq 0$.

$$3 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}} = 0$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0$$

Замена переменной: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t, \quad t > 0$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25$$

$$t_1 = \frac{2}{3}, \qquad t_2 = -1$$

Выполняем обратную замену:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = -1 \ - \text{ нет решений}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{2}{3}$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

Графический метод решения уравнений

Пример 11.Решить уравнение $3^x = -x - \frac{2}{3}$

Функция $y = 3^x$, стоящая в левой части уравнения, является возрастающей. Функция $y =$ —x-2/3, стоящая в правой части уравнения, является убывающей. Это означает, что если графики этих функций пересекаются, то не более чем в одной точке. В данном случае нетрудно догадаться, что графики пересекаются в точке x = -1. Других корней не будет.

Ответ: x = -1.

Задания для выполнения практической работы

Практическая работа №5

Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

	1 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 8\sqrt{2}$	7	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \frac{1}{81}$
2	$3^{x^2-4,5} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{27}$	8	$7^{x^2-5x} > \left(\frac{1}{7}\right)^6$
3	$64 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} = 4^{\sqrt{x-1}}$	9	$0,2^{3x+4} + 0,2^{3x+5} > 6$
4	$49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$		
5	$5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8$		
6	$8^{x-3} \cdot 3^{x-1} = 4^{x-4}$		

	2 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$\left(\frac{2}{3}\right)^{8x+1} = 1,5^{2x-3}$	7	$0,6^{4x+3} \leq 0,6^{6x-1}$
2	$0,5^{x^2-5,5} \cdot \sqrt{0,5} = 32$	8	$2^{x^2-7x+12} > 1$
3	$8^{\sqrt{x-1}} = 2^{x+1}$	9	$0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geq 7$
4	$5^x + 125 \cdot 5^{-x} - 30 = 0$		
5	$3^x - 3^{x+3} = -78$		

6	$4^{2x-1} \cdot 5^{x-6} = 2^{3x+4}$		

Практическая работа №5

Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

	3 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$	7	$5^{10x+2} \geq \frac{1}{125}$
2	$2^{x^2-7,5} \cdot \sqrt{2^{-1}} = \frac{1}{128}$	8	$7^{x^2-5x+6} < 1$
3	$27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$	9	$3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$
4	$2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x - 1323 = 0$		
5	$3^{2x+1} - 3^{2x-1} + 3^{2x-2} = 225$		
6	$3^{5x-1} \cdot 7^{2x-2} = 3^{3x+1}$		

	4 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$6^{2x-8} = 216^x$	7	$\left(\frac{3}{7}\right)^{5x-12} \leq \left(\frac{9}{49}\right)^x$
2	$0,1^{x^2-0,5} \cdot \sqrt{0,1} = 0,001$	8	$2^{x^2-8x+19} > 16$
3	$2^{\sqrt{13-x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$	9	$4^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^x \leq 2,25$
4	$4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$		
5	$3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 \cdot 3^{2x-1} = 1$		

6	$2^{4x+2} \cdot 5^{-3x-1} = 6{,}25 \cdot 2^{x+1}$		

Практическая работа №5

Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

	5 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$3^{-x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$	7	$\left(\frac{1}{4}\right)^{7x-8} > \left(\frac{1}{64}\right)^{x}$
2	$\sqrt{0{,}2} \cdot 0{,}2^{x^2-4{,}5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	8	$3^{x^2-3x+5} < 27$
3	$2^{x-\sqrt{x+1}} = 32$	9	$9^{x} \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^{x} < 0{,}25$
4	$25^{x} - 2 \cdot 5^{x} - 15 = 0$		
5	$2^{x+3} - 2^{x} = 112$		
6	$35^{4x+2} = 5^{3x+4} \cdot 7^{5x}$		

	6 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$4^{x} = 8^{2x-3}$	7	$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \geq 2^{3x+6}$
2	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3^{x^2-7{,}5} = \frac{1}{81}$	8	$7^{x^2-5x} < 7^{-6}$
3	$64 \cdot 2^{\sqrt{x-1}} = 4^{\sqrt{x-1}}$	9	$5^{x} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^{x} \geq \frac{4}{9}$
4	$169^{x} - 6 \cdot 13^{x} + 5 = 0$		

5	$2^x - 2^{x-4} = 15$		
6	$2^{x+1} \cdot 5^{x+3} = 250 \cdot 9^x$		

Практическая работа №5
Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

	7 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$100^x = (10^{x-1})^5$	7	$\left(\frac{1}{25}\right)^x > 5^{4x+6}$
2	$0{,}5^{x^2-3{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5} = \frac{1}{2}$	8	$11^{2x^2+3x} \leq 121$
3	$27^{\sqrt{x-1}} = 3^{x+1}$	9	$3^x \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^x \leq 0{,}0625$
4	$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$		
5	$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$		
6	$6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$		

	8 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$\left(\frac{1}{64}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$	7	$32^x > 2^{3x+6}$
2	$0{,}3^{2x^2-6{,}5} \cdot \sqrt{0{,}3} = \frac{10^4}{81}$	8	$0{,}9^{x^2-4x} \leq \left(\frac{10}{9}\right)^3$
3	$27^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{9^{x+1}}$	9	$23^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 = 0$		

5	$3^{2x+1} - 3^{2x-1} + 3^{2x-2} = 225$		
6	$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x$		

Практическая работа №5

Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств»

	9 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$8^x = 16^{2x-3}$	7	$0{,}001^x \leq 10^{3x+12}$
2	$3^{x^2-4{,}5} \cdot 27 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	8	$2^{x^2-8x+18} > 8$
3	$2^{\sqrt{13-x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$	9	$37^{\frac{5x-3}{x+6}} \geq 1$
4	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 162 = 0$		
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{5x} = \frac{1}{8}$		
6	$2^{2x+1} \cdot 5^x = 16000$		

	10 вариант		
	Решите уравнения и неравенства		
1	$36^x = 6^{4x-1}$	7	$49^x > \left(\frac{1}{7}\right)^{x+15}$
2	$125 \cdot 0{,}2^{x^2-4{,}5} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^3}$	8	$0{,}4^{x^2-7x+12} < 1$
3	$3^{x-\sqrt{x+1}} = 243$	9	$0{,}36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$
4	$5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$		

5	$3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 \cdot 3^{2x-1} = 1$		
6	$4^{x+2} \cdot 3^{x+1} = 576$		

Литература

1. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490794
2. *Богомолов, Н. В.* Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490795
3. *Баврин, И. И.* Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / И. И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 616 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15118-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490174
4. *Кремер, Н. Ш.* Математика для колледжей : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. Ш. Кремер, О. Г. Константинова, М. Н. Фридман ; под редакцией Н. Ш. Кремера. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 362 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15601-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/509126